La congettura di Schanuel uniforme

18/07/18

1 Sottospazi lineari e tori

Osservazione 1.1. Dato un reticolo Λ possiamo definire il sottospazio $\mathbb{Q}$-lineare

$$N_\Lambda = \{x \in \mathbb{C}^n | x \cdot \lambda = 0 \, \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Viceversa dato N possiamo definire

$$\Lambda_N = \{\lambda \in \mathbb{Z}^n | \lambda \cdot x = 0 \, \forall x \in N\}.$$

Osserviamo che Λ_N è primitivo. Dato un sottospazio $\mathbb{Q}$ lineare N posso associargli Λ_N e definire il toro(irriducibile) H_{Λ_N}. Questo toro lo chiamiamo $\exp(N)$.

Lemma 1.2. La mappa $N \to \Lambda_N$ è biettiva dai sottospazi $\mathbb{Q}$ lineari ai reticoli primitivi.

Proof.

1. Iniettività: Sia, per assurdo, $N \neq N'$ e $\Lambda_N = \Lambda_{N'}$ WLOG $n' \notin N$. Questo significa che n' non verifica $a \cdot n' = 0$ con a vettore intero tra quelli che generano le equazioni di N. Ma a sta in Λ_N e non in $\Lambda_{N'}$ e quindi ho l'assurdo.

2. Suriettività: Sia Λ un reticolo primitivo con base $\lambda_1, \dots \lambda_k$. Sia A la matrice di cambio base tale che $A\lambda_j = e_j$ per ogni $j \leq k$. Sia

$$N = \{x \in \mathbb{C}^n | (e_i^T (A^{-1})^T x) = 0; \, i \leq k\}.$$

So che $(x\lambda) = ((x(A^{-1})^T)^T A\lambda)$. Gli elementi di N hanno (a meno del cambio di coordinate) zeri nelle prime k coordinate e quindi $\Lambda_N = \{\lambda | A\lambda \in < e_1, .., e_k >\}$ che è proprio Λ.

$\square$

Corollario 1.3. La mappa $N \to \exp(N)$ è biettiva dai sottospazi $\mathbb{Q}$-lineari ai tori.

Lemma 1.4. Se N è sottospazio $\mathbb{Q}$-lineare allora $\dim N = \dim(\exp(N))$. Inoltre se poniamo e^N come l'insieme $e^N := \{e^x | x \in N\}$ allora $e^N = \exp(N)$.

Proof. L'uguaglianza delle dimensioni è ovvia perché il numero di equazioni indipendenti che generano N è lo stesso di quello di $\exp(N)$. Sia Λ il reticolo primitivo che discende da N generato dai vettori a^k. Allora $\exp(N)$ è generato dalle equazioni $\prod y_i^{a_i^k} = 1$. E' ovvio che $e^N \subseteq \exp(N)$. Viceversa sia $y \in \exp(N)$ e sia x tale che $y = e^x$. Sia A la matrice generatrice di N, ovvero tale che $N = \{x | Ax = 0\}$. Sappiamo che $Ax = 2\pi i z$ con $z \in \mathbb{Z}^k$. Sia w tale che $Aw = z$. Si può trovare tale w perché Λ_N è primitivo. Se $x' = x - 2\pi i w$ allora $e^{x'} = y$ e $x' \in N$. $\square$

2 La congettura di Zilber

Definizione 2.1. Sia W in G_m^n una varietà algebrica definita su $\mathbb{Q}$, T un torsion coset e S una componente irriducibile di $W \cap T$. Allora diremo che S è componente atipica dell'intersezione se

$$\dim S > \dim W + \dim T - n.$$

Se S non è atipica, allora è tipica.
Sia P un torsion coset. Sia W in G_m^n una varietà algebrica definita su $\mathbb{Q}$, T un torsion coset e S una componente irriducibile di $W \cap T$ contenuta in P. Allora diremo che S è componente atipica dell'intersezione rispetto a P se

$$\dim S > \dim W \cap P + \dim T \cap P - \dim P.$$

Congettura 2.1 (Zilber(Z))**.** Sia $V \subseteq G_m^n$ definita su $\mathbb{Q}$. Esiste una collezione finita $\tau(V) = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ di torsion coset di G_m^n propri tali che se T è un torsion coset e S è una componente atipica di $V \cap T$ allora $S \subseteq T_i \in \tau(V)$.

Proposizione 2.2. Sia P torsion coset in G_m^n e $V \subseteq P$. Esiste una collezione finita di torsion coset propri $\pi_P(V)$ tali che se $T \subseteq P$ e S è componente atipica di $V \cap T$ rispetto a P allora esiste $Q \in \pi_P(V)$ tale che $S \subseteq Q$ e S è tipica rispetto a Q.

Proof. Facciamo l'induzione sulla dimensione di P. Se P ha dimensione 0 allora S non è componente atipica e quindi il teorema è vero. Procediamo per induzione sulla dimensione di P. Per (Z) esiste $Q \subsetneq P$ tale che $S \subseteq Q$ (stiamo usando che P è isomorfo a G_m^k per qualche k). Se S è componente tipica di $V \cap T$ rispetto a Q allora basta mettere i Q in $\pi_P(V)$(sappiamo che sono finiti). Altrimenti esiste $R \in \pi_Q(V \cap Q)$ per cui S è tipica rispetto a R. Se quindi mettiamo anche

$$\bigcup_{Q \in \tau_P(V)} \pi_Q(V \cap Q)$$

abbiamo la tesi. □

Definiamo

$$\pi(V) := \pi_{G_m^n}(V).$$

3 La congettura di Schanuel uniforme

Proposizione 3.1. Sia $x = (x_1, \ldots x_m) \in G_m^m$. Allora $\text{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x_1, \ldots, x_m) < n$ se e solo se esiste V varietà definita su $\mathbb{Q}$ di dimensione minore di n. In generale $\text{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x_1, \ldots, x_m) \leq \dim V$ per ogni varietà definita su $\mathbb{Q}$ che contiene x.

Proof. Vale $\text{tr.d.}(x) \leq \text{tr.d.}(V) = \dim V$(Teorema 5.9, A course in commutative algebra, Kemper). Se prendiamo $(m - \text{tr.d.}(x))$ equazioni algebricamente indipendenti che vengono verificate da x e W la varietà generata da loro allora concludo. □

Congettura 3.1 (Schanuel(S))**.** Sia $\text{lin.d.}(x_1, \ldots, x_m)$ la dimensione del $\mathbb{Q}$-spazio lineare definito dagli x_i. Allora

$$\text{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x_1, x_2 \ldots x_m, \exp(x_1), \ldots \exp(x_m)) \geq \text{lin.d.}(x_1, \ldots, x_m).$$

Congettura 3.2 (Schanuel Uniform(SU)). Sia $V \subseteq \mathbb{C}^n \times G_m^n$ definita su $\mathbb{Q}$ di dimensione minore di n e $\mathbb{Q}$-irriducibile. Esiste un insieme finito $\mu(V)$ di sottospazi lineari propri di $\mathbb{C}^n$ definiti su $\mathbb{Q}$ tali che, se

$$(x, \exp(x)) := (x_1, \dots x_n, \exp(x_1), \dots \exp(x_n)) \in V$$

allora $(x) \in M + 2\pi i z$ con $M \in \mu(V)$ e $z \in \mathbb{Q}^n$. Inoltre se M ha codimensione 1 allora $x \in M$.

Teorema 3.2. (S)+(Z) implica (SU).

Proof. Procediamo per induzione sulla dimensione di V. Nel caso in cui $\dim V = 0$ allora V è un insieme finito ed il teorema è ovvio. Sia $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{C}^n \times G_m^n \to G_m^n$ la proiezione sulle ultime n coordinate e poniamo $W := \overline{\mathrm{pr}_2(V)}$. W è una varietà definita su $\mathbb{Q}$ e sia $d = \dim(V) - \dim(W)$. Sia $W' = \{y \in W | \dim_{\overline{\mathbb{Q}(y)}}(\mathrm{pr}_r^{-1}(y) \cap V) > d\}$ e sia $V' = \{(x, y) \in V | y \in W')\}$. V' è una varietà definita su $\mathbb{Q}$ ed è contenuta strettamente in V. Infatti se guardo V come varietà in $\overline{\mathbb{Q}}$ c'è un aperto denso per cui $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathrm{pr}_2^{-1}(y)) \leq d$ per cui concludo che V' è strettamente contenuto in V. Ma se la dimensione fosse la stessa allora sarebbero generate dagli stessi polinomi che è assurdo. Quindi $\dim V' < \dim V$. Ci basterà quindi mettere $\mu(V')$ in $\mu(V)$ per avere il teorema nel caso in cui $(x, e^x) \in V'$. Dato che $(x, \exp(x)) \in V$ ha dimensione minore di n allora, per (Z),

$$\mathrm{lin.d.}(x) \leq \mathrm{tr.d.}(x, e^x) < n$$

e quindi gli x_i sono $\mathbb{Q}$- linearmente dipendenti. Questo ci dice che appartengono a un $\mathbb{Q}$-sottospazio lineare proprio di $\mathbb{C}^n$. Sia N un sottospazio $\mathbb{Q}$-lineare di $(\mathbb{C})^n$ che contiene x tale che $\dim N = \mathrm{lin.d.}(x)$. Prendiamo $T = \exp(N)$ che sappiamo essere irriducibile.
Resta da fare il caso $(x, e^x) \notin V'$. Se $(x, e^x) \in V \setminus V'$ allora

$$\mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x, e^x) = \mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(e^x) + \mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}(\exp(x))}(x) \leq \dim(T \cap W) + \dim(V \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(\exp(x)).$$

Sia ora $s = n + \dim(W \cap T) - \dim W - \dim T$. Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x, e^x) &\leq s + \dim W + \dim T - n + d \\ &= \dim V + \dim T - n + s < \dim T + s = \mathrm{lin.d.}(x) + s. \end{aligned}$$

Per (S) abbiamo che $s > 0$ e quindi $W \cap T$ è atipica. Dunque esiste P in $\pi(V)$ tale che la componente irriducibile massimale di $W \cap T$ che contiene $\exp(x)$ è contenuta in P e $W \cap T$ è tipica rispetto a P. Concludiamo quindi che $e^x \in P$ con $P \in \pi(W)$. Vediamo che se P ha codimensione 1 allora $T \subseteq P$. Sappiamo che $W \cap T$ è tipica quindi

$$\dim_y(W \cap T \cap P) = \dim(T \cap P) + \dim_y(W \cap P) - \dim P$$

dove $\dim_y$ è la dimensione della componente irriducibile massimale che contiene $y := \exp(x)$. Esistono due costanti $s_W, s_T \geq 0$ tali che

$$\dim(T \cap P) = \dim(T) + \dim(P) - n + s_T$$

e

$$\dim_y(W \cap P) = \dim(W) + \dim(P) - n + s_W$$

e quindi

$$\begin{aligned}\dim_y(W\cap T\cap P) &= \dim(T\cap P) + \dim_y(W\cap P) - \dim P\\ &= \dim(T) + \dim(P) - 2n + s_T + \dim(W) + s_W.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\dim_y(W\cap T\cap P) \geq \dim_y(W\cap T) + \dim(P) - n = \dim(T) + \dim(P) - 2n + s + \dim(W).$$

Concludo che $0 < s \leq s_T + s_W$. Se $s_T = 0$ allora $s_W > 0$ e quindi $W\cap P$ è atipica. Dunque, usando $\dim(P) = n-1$,

$$0 < s_W = 1 + \dim_y(W\cap P) - \dim(W)$$

da cui $\dim_y(W\cap P) = \dim(W)$. Ho inoltre che $\dim_y(W\cap T\cap P) = \dim_y(W\cap T)$ perché P contiene la componente di y di $W\cap T$. Concludo che

$$\dim_y(W\cap T\cap P) = \dim(T\cap P) + \dim_y(W\cap P) - \dim(P) = \dim(T) - n + s_T + \dim W$$

e

$$\dim_y(W\cap T\cap P) = \dim_y(W\cap T) = \dim(W) + \dim T - n + s.$$

Ottengo $0 = s_T = s$, assurdo. Quindi $s_T > 0$ e da questo posso dedurre $T\subseteq P$. Infatti come prima ho che $\dim(T\cap P) = \dim(T)$ da cui, trattandosi di irriducibili, concludo che $T\subseteq P$. Sappiamo che P è un toro perché è un torsion coset che contiene l'identità (visto che contiene T) e quindi c'è un sottospazio lineare associato M tale che $\exp(P) = M$. Ma per come è stato definito exp deduciamo che se $\exp(N)\subseteq \exp(M)$ allora $N\subseteq M$. Se P ha codimensione 1 allora anche M ha codimensione 1 e $x\in N\subseteq M$. Ovviamente questi sottospazi M dipendono solo da V e sono finiti. Aggiungendo questi M a $\mu(V)$ abbiamo fatto il caso in cui P ha codimensione 1 Dobbiamo ora concludere con il caso in cui la codimensione di P non è 1. Sappiamo che $e^x\in P$. Essendo P un torsion coset questo è contenuto in un H_Λ per qualche reticolo Λ. Quindi e^x verifica equazioni del tipo $\prod y_i^{a_i} = 1$ e quindi $\sum a_i x_i = 2\pi i k$. Sia A la matrice generata dagli a_i e $\overline{k}$ il vettore dei k(i.e. $Ax = 2\pi i\overline{k}$). Prendo z un vettore in $\mathbb{Q}^n$ per cui vale $Az = \overline{k}$ che esiste per come è stata scelta A ma non è a coefficienti interi a meno che P non sia un toro. Ma allora $x - 2\pi i z\in M$, dove M è il sottospazio lineare generato dalle equazioni $Ax = 0$. Anche questi sottospazi M dipendono solo da V e sono finiti, quindi aggiungendoli a $\mu(V)$ abbiamo concluso.

□

Teorema 3.3. (SU) implica (S)

Proof. Iniziamo vedendo che (S) può essere riformulata nel seguente modo: Se $x_1,\dots x_m$ sono indipendenti allora $\mathrm{tr.d.}(x,\exp(x))\geq m$. Questa riformulazione ovviamente è implicata da (S), vediamo il viceversa. Supponiamo che $\mathrm{lin.d.}(x) = k$ e $x_1,\dots x_k$ sono indipendenti. Allora

$$\mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x,\exp(x)) = \mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x_1,\dots,x_k,\exp(x_1),\dots,\exp(x_k))$$

e quindi

$$\mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x,\exp(x)) = \mathrm{tr.d.}_{\mathbb{Q}}(x_1,\dots,x_k,\exp(x_1),\dots,\exp(x_k)) \geq k = \mathrm{lin.d.}(x).$$

Dimostreremo questa formulazione equivalente. Supponiamo, per assurdo, che $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ siano linearmente indipendenti ma $\text{tr.d.}(x, \exp(x)) < n$. Allora $(x, \exp(x)) \in V$ con V sottovarietà di dimensione minore di n. Per (SU) abbiamo che $x \in M \in \mu(V)$. Se M ha codimensione maggiore di 1 allora ci sono $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}^n$ tali che

$$a_i \cdot x = 2\pi i z_i$$

per $i = 1, 2$ e $z_i \in \mathbb{Q}$. Ma allora se $c = a_1 z_2 - a_2 z_1$ otteniamo $cx = 0$ che implica x linearmente dipendente, assurdo(c è non nullo perché possiamo scegliere due equazioni indipendenti). Se M invece ha codimensione 1 allora gli elementi di x sono $\mathbb{Q}$-linearmente indipendenti. $\square$

Abbiamo usato una congettura di Zilber diversa da quella che c'è nell'articolo. Vediamo che le due congetture sono equivalenti. Per tori non irriducibili intendiamo sottogruppi algebrici.

Lemma 3.4. Le seguenti sono equivalenti

1. Sia $V \subseteq G_m^n$ definita su $\bar{\mathbb{Q}}$. Esiste una collezione finita $\tau(V) = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ di torsion coset di G_m^n propri tali che se T è un torsion coset proprio e S è una componente atipica di $V \cap T$ allora $S \subseteq T_i \in \tau(V)$.

2. Sia $V \subseteq G_m^n$ definita su $\bar{\mathbb{Q}}$. Esiste una collezione finita $\tau(V) = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ di tori non irriducibili di G_m^n propri tali che se T è un toro non irriducibile proprio e S è una componente atipica di $V \cap T$ allora $S \subseteq T_i \in \tau(V)$.

Proof. Se vale 1 allora prendiamo $T_i \subseteq T_i'$ con T_i' tori non irriducibili della stessa dimensione dei T_i. Se S è componente irriducibile atipica di P toro non irriducibile allora è componente atipica di un torsion coset (basta prendere la componente irriducibile di P che contiene S). Allora S è componente irriducibile atipica rispetto ad un torsion coset e quindi S è contenuto in uno dei T_i e quindi nei T_i'. Se vale 2 e allora prendo $\tau(V)$ come tutti i torsion coset che compongono il $\tau(V)$ nel caso 2 (le componenti irriducibili massimali). Allora se S è componente atipica in un torsion coset allora lo è anche di un toro irriducibile che contiene questo torsion coset e quindi S sta in uno dei tori irriducibili di $\tau(V)$. Ma S è irriducibile e quindi sta in uno dei torsion coset. $\square$