Altezze in $\mathbb{G}_m$, Bogomolov effettivo.

1

29/5 : Qualche dimostrazione in casi particolari (ipersuperfici, $n = 2, \dots$)

Richiami dell'ultima lezione (8/5) (Varietà def su un CdN K e K-irr)

- Altezza di Weil in $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_n$
- Altezze di polinomi $\longrightarrow$
- Misura di Mahler

$$P = \sum c_\lambda x^\lambda \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

Esercizio

$$M(P) \le \|P\|_1 \le 2^{\deg P} M(P) \qquad (n=1)$$

$$M(P) \le \|P\|_1 \le 2^{\sum \deg_{x_i} P} M(P) \le 2^{n \deg P} M(P)$$

($n>1$: induzione)

$\left(\le (n+1)^{\deg P} M(P) \leftarrow \text{utilizzare } |c_\lambda| \le \dfrac{(\deg P)!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!} M(P) \right)$

- stabilizzatore di una sottovarietà : $\mathrm{Stab}(V) = \{x \mid xV = V\}$
- altezza normalizzata di un'ipersuperficie
- altezza normalizzata di una sottovarietà : $\hat{h}(V) = \lim\limits_{l \to \infty} \dfrac{h([l]V) \deg(V)}{l \deg([l]V)}$

V $\bar{\mathbb{Q}}$-irr

Prop (richiamo)

$$\deg([l]^{-1}V) = l^{\mathrm{codim}(V)} \deg(V), \qquad \hat{h}([l]^{-1}V) = l^{\mathrm{codim}(V)-1} \hat{h}(V)$$

$$\deg([l]V) = \frac{l^{\dim(V)} \deg(V)}{|\mathrm{Ker}([l]) \cap \mathrm{Stab}(V)|}, \qquad \hat{h}([l]V) = \frac{l^{\dim(V)+1} \hat{h}(V)}{|\mathrm{Ker}([l]) \cap \mathrm{Stab}(V)|}$$

Dim ($\mathrm{codim}\, V = 1$, $V : F = 0$)

- $[l]^{-1}V : \quad F(x_1^l, \dots, x_n^l) = 0$
- $[l]^{-1}[l]V = \bigcup\limits_{\zeta \in \mathrm{Ker}[l]} \zeta V$
- $\begin{cases} M(P(x_1^l, \dots, x_n^l)) = M(P) \\ \deg(P(\quad\quad)) = l \deg(P) \end{cases}$
- Formula delle classi per l'azione di $\mathrm{Ker}[l]$ su $\{\zeta V \mid \zeta \in \mathrm{Ker}[l]\}$

Esercizio

Sia $\varphi_A : \mathbb{G}_m^n \to \mathbb{G}_m^n$ un'isogenia. Allora $\hat{h}(\varphi_A^{-1}(V)) = \hat{h}(V)$

(divisori elementari)

1 bis

– Altezza (non normalizzata) di varietà

$V \subseteq \mathbb{P}_n$ dim d

$\mathbb{F}$ forma di Chow

(irriducibile pol. multiomogeneo in $u_0^1, \dots, u_n^1, \dots, u_0^{d+1}, \dots, u_n^{d+1}$

che si annulla sull'intersezione tra V e lo spazio lineare

$$\left\{ \underline{x} \in \mathbb{P}_n \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} u_i^j x_i = 0 \;,\; j = 1, \dots, d+1 \right\} \quad)$$

$h(V)$ = altezza dell'ipersuperficie di $\mathbb{P}_n^{(d+1)n}$

definita da $F = 0$

③

<u>Corollario</u> (coerenza della def di $\hat{h}(V)$ per ipersuperfici)

$$\frac{\hat{h}([\ell]V)\, dg(V)}{\ell\, dg([\ell]V)} \to \hat{h}(V)$$

<u>Dim</u> (cenni)

Dalla proposizione si ha: $\dfrac{\hat{h}([\ell]V)\, dg(V)}{\ell\, deg([\ell]V)} = \hat{h}(V)$

Ora, per la disuguaglianza sulla misura di Mahler applicata all'equazione di $[\ell]V$

$$\hat{h}(V) = \frac{\hat{h}([\ell]V)\, dg(V)}{\ell\, dg([\ell]V)} = \frac{h([\ell]V)\, dg(V)}{\ell\, dg([\ell]V)} + O(\ell^{-1} dg\, V)$$

$\square$

- Richiami: minimo essenziale

<u>OSS</u> $\mu_{ess}([\ell]V) = \ell\, \hat{\mu}_{ess}(V)$

$\mu_{ess}(V^{\sigma}) = \mu_{ess}(V)$ $\quad \sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

- Richiami: disuguaglianza di Zhang (dim $V = d$)

V/K $\quad K$-irr (K campo di numeri)

<u>Prop</u>

$$\frac{\hat{\mu}(V)}{(d+1)\, dg(V)} \leq \mu_{ess}(V) \leq \frac{\hat{\mu}(V)}{dg(V)}$$

(3)

Lemma di Siegel (

$V \subseteq \mathbb{G}_m^n$ $\mathbb{Q}$-irr, $\mathfrak{P} \trianglelefteq \mathbb{Q}[X_0, \dots, X_n]$

ideale di definizione di V in $\mathbb{P}_n$

$$r := H(\mathfrak{P}^{(T)}; L) = \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q}[X_0 \dots X_n] \big/ [\mathfrak{P}^{(T)}]_L \right)$$

Supponiamo $r < N := \underbrace{\binom{L+n}{n}}_{K = r/(N-r)}$ e poniamo ~~...~~ (esp. di Dirichlet)

Allora

$\exists\, F \in \mathbb{Q}[\underline{X}]$ di grado $\leq L$, nullo su V

con molteplicità $\leq T$ e tale che

$$h(F) \leq K \left((T+n) \log(L+1) + L\, \hat{h}(V) \right)$$

Versione "assoluta" $\mathbb{Q} \to \overline{\mathbb{Q}}$ (si perde però il controllo sul campo di definizione di F anche se V è definita su un campo "controllato")

OSS

$V \doteq \cancel{F} = 0$ $\longrightarrow$ $K \leq n \left(1 + \frac{DT}{L-DT}\right)^n \frac{DT}{L-DT} \leq 3n\,DT/L$

$\deg F = D$ $\qquad$ se $L \geq (n+1)DT$

$$\left(\text{infatti } K = \frac{\binom{L+n}{n} - \binom{L-DT+n}{n}}{\binom{L-DT+n}{n}} \right)$$

④

<u>Dimostrazione</u> della disuguaglianza di Zhang (V = ipersuperficie

$V = \{P = 0\}$. <u>OSS</u> posso supporre $P \in \mathbb{Z}[X]$ e irriducibile (di grado D)

$\boxed{1.}$ minorazione del minimo essenziale.

Per Siegel $\exists\, F_L \in \mathbb{Z}[\underline{X}]$, $\deg F_L \le L$, $P \mid F_L$
(con $T=1$) parametro

e $h(F_L)$ maggiorata da $\kappa L \left(\underbrace{\frac{(n+1)\log(L+1)}{L}}_{\to 0 \text{ per } L \to \infty} + \hat{\mu}_{ess}(V) \right)$

con $\kappa L \le n \left(1 + \frac{D}{L-D}\right)^n \frac{DL}{L-D} \longrightarrow nD$

Ora $\hat{h}(V) \le \hat{h}(F_L) \le h(F_L) \lesssim nD\,\hat{\mu}_{ess}(V)$

$P \mid F_L$ + moltiplicatività delle misure di Mahler

$\boxed{2.}$ maggiorazione del minimo essenziale. Suppongo per semplicità $n=2$.

<u>Lemma</u> $P \in \mathbb{C}[X]$ di grado D ; h primo $\Rightarrow \prod_{\substack{\omega^h=1 \\ \omega \neq 1}} |P(\omega)| \le h^D M(P)^{h-1}$

<u>Dim</u> (esercizio)

Sia ora $P \in \mathbb{C}[X,Y]$. Per $\omega \in \mathbb{C}$,
Indichiamo con $M(P(\omega, Y))$ la misura di Mahler di $z \to P(\omega, z)$

Per il lemma si ha (h primo)

$$\frac{1}{h-1} \sum_{\substack{\omega^h=1 \\ \omega \neq 1}} \log M(P(\omega, Y)) \le \log M(P) + \frac{D_X \log h}{h-1}$$

dove D_X è il grado di P in Y

5

Ne segue che, per p abbastanza grande e ω radice p-esima primitiva

$$\min \{ h(\alpha) \mid P(\omega, \alpha) = 0 \}$$

$$\leq \frac{1}{p-1} \sum_{\alpha \mid P(\omega,\alpha)=0} h(\alpha)$$

$$\leq \frac{\hat{h}(V)}{D_Y} + \varepsilon$$

ove i punti (ω, α) così ottenuti sono un insieme infinito di punti di V

$$\Longrightarrow \quad \mu_{ess}(V) \leq \frac{\hat{h}(V)}{D_Y}$$

Per ottenere la maggiorazione $\mu_{ess}(V) \leq \dfrac{\hat{h}(V)}{d_Y(V)}$

si considera l'ipersuperficie V' definita da $Q = P(xy, y)$ osservando che $\deg_Y Q = d_Y P$ e che $\hat{h}(V') = \hat{h}(V)$ (per un esercizio proposto)

<u>Richiami</u> Minorazione di $\hat{\mu}_{ess}(V)$ (Bogomolov)

<u>Cenni sulle minorazioni</u>

(1) $V \subseteq \mathbb{G}_m^2$ curve $/\mathbb{Q}$, $V : P = 0$, $P \in \mathbb{Z}[x,y]$
$\neq$ unione di $\neq$ traslate di torsione

- ~~Ugu~~ Disuguaglianza di Dobrowolski $F \in \mathbb{Z}[x,y]$, $\deg F \leq L$

$\forall \underline{\alpha} \in \mathbb{G}_m^2(\overline{\mathbb{Q}})$, $\forall p$ primo, $\forall v \mid p$

$$(*) \qquad |F(\underline{\alpha}^p)| \leq p^{-T} \max(1, |\alpha|_v)^{TL}$$

dove T è l'ordine di annullamento in $\underline{\alpha}$ di F

<u>Dim</u>

- $T = 1$: piccolo teorema di Fermat

$T > 1$:

- Se $V \neq$ unione di traslate di torsione $\hat{\mu}_{ess}([p]V) \neq \hat{\mu}_{ess}(V)$

$\Rightarrow \exists\, \underline{\alpha}$, $h(\underline{\alpha}) \leq \hat{\mu}_{ess}(V) + \varepsilon$

$\underline{\alpha}^p \in V$, $\underline{\alpha}^p \notin V$

Applico $(*)$ a $F = P$. Per la formula del prodotto

$$h(\underline{\alpha}) \geq \frac{\log p - h(P)}{p \deg(V)} \qquad (L = \deg V)$$

ove $h(P) \leq \hat{h}(V) + \deg(V) \log 2$

$\leq (\log 2 + 2\hat{\mu}_{ess}(V)) \deg(V)$ (Zhang)

e quindi $\hat{\mu}_{ess}(V) \geq c(\deg V) > 0$

$\uparrow$

invariante esponenziale

2) V curve $/\bar{\mathbb{Q}}$ irr. $V \neq$ traslato

Si usa una differente disuguaglianza metrica - Sia $F \in \bar{\mathbb{Q}}[X,Y]$ nullo in $\underline{\alpha}$ con molteplicità $\geq T$ e di grado $\leq L$

Allora $\forall\, p$ primo, $\forall\, v \mid p$, $\forall\, \underline{\zeta} \in \ker[p]$

$$|F(\underline{\zeta}\,\underline{\alpha})|_v \leq p^{-\frac{T}{p-1}}\, |F|_v \max(1, |\alpha|_v)^L$$

(Taylor + $|e^{2\pi i/p} - 1|_v \leq p^{1/p-1}$)

Se applico direttamente, come prima, all'equazione di V ottengo

$$h(\alpha) \geq \frac{\frac{\log p}{p-1} - h(P)}{\deg(V)} < 0 \quad !$$

dim 0

Supponiamo per semplificare che $\mathrm{Stab}(\mathcal{C}) \cap \ker[p]$ sia banale.
Allora $\exists\, \underline{\alpha} \in \mathbb{G}_m^2$, $h(\underline{\alpha}) \leq \hat{\mu}_{ess}(V) + \varepsilon$, $\alpha \in V$
e $\underline{\zeta}\,\underline{\alpha} \notin V$ per qualche $\underline{\zeta} \in \ker[p]$

8

Come migliorare la diminuzione nel primo caso e farla funzionare nel secondo?

Siegel

$\exists F$, $p^T | F$, $(*)\ h(F) \ll \frac{DT^2}{L} \log L + DT\, \hat{\mu}_{ess}(V)$, $\deg F \leq L$

($F \in \mathbb{Z}[X]$ nel primo caso; $F \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ nel secondo)

1° caso

Supponiamo $F \not\equiv 0$ su $[p]V$. Allora $\exists \underline{\alpha} \in V$, $h(\underline{\alpha}) \leq \hat{\mu}_{ess}(V) + \varepsilon$, t.c. $F(\underline{\alpha}^p) = 0$. Utilizziamo le dis. di Dobrowolski.

Formula del prodotto:

responsabile del # coeff. elevati non nulli

$$0 \leq h(F) + n \log(L+1) + p L h(\underline{\alpha}) - T \log p$$

Scegliamo $p \in [N/2, N]$ (N nuovo parametro).

Inserendo la disuguaglianza $(*)$,

$$T \log N \ll \left(1 + \frac{DT^2}{L}\right) \log L + (NL + DT)\, \hat{\mu}_{ess}(V)$$

Scegliamo $L \approx DT^2$ e supponiamo $\log L \ll \log D$ e $\log N \approx \log\log D$. Trascuriamo per semplificare i termini in $\log\log D$.

Allora se $\boxed{(NL + DT)\, \hat{\mu}_{ess}(V) \leq \log D}$ $(**)$

si ottiene

$$T \ll \log D$$

Per contraddirla scegliamo $T \geq c \log D$

⑨

Si ha dunque

$$F \equiv 0 \text{ su } [p]V \quad \text{per} \quad N/2 \leq p \leq N$$

<u>Lemma di zeri</u>

$$\deg\Big(\bigcup_{N/2 \leq p \leq N} [p]V\Big) \leq L$$

Fuori da un insieme di primi eccezionale (e trascurabile)

$$\deg\Big(\bigcup_{N/2 \leq p \leq N} [p]V\Big) \geq \sum_{N/2 \leq p \leq N} \deg([p]V) \ggg N D$$

Da cui $\quad L \ggg N D$

e (ricordando che $L \approx DT^2 \approx D(\log D)^2$)

$$N \lll (\log D)^2$$

Ottengo una contraddizione prescegliendo $N \gg c \cdot (\log D)^2$.

Ma allora $(**)$ non può essere soddisfatta

e dunque

$$\hat{P}_{ess}(V) \gg \max(NL, DT)^{-1} \log D$$

$$\ggg (\log D)^3$$

2° caso

Suppongo $F \not\equiv 0$ su $\ker[p]V$. Allora $\exists \underline{\alpha} \in V$,

$h(\underline{\alpha}) \le \hat{\mu}_{ess}(V) + \varepsilon$, $\exists \underline{\xi} \in \ker[p]$, $F(\underline{\xi}\,\underline{\alpha}) \neq 0$.

Formula del prodotto

$$0 \le h(F) + n \log(L+1) + L\, h(\alpha) - \frac{T}{p} \log p$$

~~Re~~
$$\frac{T}{p} \log p \ll \left(1 + \frac{DT^2}{L}\right) \log L + (L + DT)\, \hat{\mu}_{ess}(V)$$

Scelgo come prima $L \approx DT^2$, suppongo $\log L \ll \log D$

e $p \in [N/2, N]$ (con $\log N \approx \log\log D$)

$$\frac{T}{N} \log N \ll \log D + (L + DT)\, \hat{\mu}_{ess}(V)$$

~~Pertanto~~
Allora se $\boxed{(L + DT)\, \hat{\mu}_{ess}(V) \ll \log D}^{(**)}$,

trascurando come al solito i termini in $\log\log D$,

$$T \ll N \log D.$$

Scelgo dunque $T \ge c\, N \log D$

Si ha dunque

$$F \equiv 0 \quad \text{su} \quad \ker[p]\, V \quad \text{per} \quad N/2 \le p \le N$$

(11)

lemma di zeri

$$\deg \Big(\bigcup_{\substack{\xi \in \ker[p] \\ N/2 \leq p \leq N}} \xi V \Big) \leq L$$

Fuori da un insieme eccezionale (e trascurabile)

$$\deg \Big(\bigcup_{\substack{\xi \in \ker[p] \\ N/2 \leq p \leq N}} \Big) \geq \sum_{N/2 \leq p \leq N} \sum_{\xi \in \ker[p]} D$$

$$\geq \sum_{N/2 \leq p \leq N} p^2 D$$

$\operatorname{Stab} V = \{1\}$
per semplificare

$$\gg N^3 D$$

Ora $L \approx DT^2 \approx D N^2 (\log D)^2$

ottengo una contraddizione scegliendo

$$N \geq c \cdot (\log D)^2.$$

Ma allora (**) non può essere verificata e dunque

$$\mu^{ess}(V) \gg \max(L, DT)^{-1} \log D$$

$$\ggg (\log D)^{-5}$$

□